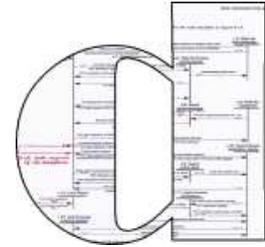


DEPENDABLE SYSTEMS AND SOFTWARE

Fachrichtung 6.2 — Informatik
Prof. Dr.-Ing. Holger Hermanns
Dipl.-Inform. Lijun Zhang



Übungsblatt 9 (Programmierung I)

Lesen Sie im Skript: Kapitel 8.8-8.10 und 9.1-9.5

Aufgabe 9.1: (Umkehrfunktion)

Geben Sie die Umkehrfunktion der Funktion $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ an.

Aufgabe 9.2: (Lambda-Notation)

Beschreiben Sie mit Hilfe der Lambda-Notation:

- (a) Eine unendliche Funktion, die nicht injektiv ist.
- (b) Eine injektive Funktion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, die surjektiv auf \mathbb{N} ist.
- (c) Eine injektive Funktion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, die nicht surjektiv auf \mathbb{N} ist.
- (d) Eine endliche Funktion, die infinitär ist.
- (e) Die unendliche Folge $0, 2, 4, 6, \dots$ der geraden natürlichen Zahlen.
- (f) Die unendliche Folge $4, 9, 16, 25, \dots$ der Quadrate der Zahlen ab 2.
- (g) Die unendliche Folge $9, 25, 49, 81, \dots$ der Quadrate der ungeraden natürlichen Zahlen ab 3.

Aufgabe 9.3: (Funktionen)

Seien die Funktionen $f, g \in \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ wie folgt gegeben:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$f(x, y)$	0	0	0	1
$g(x, y)$	0	1	1	1

- (a) Beschreiben Sie f und g mit der Lambda-Notation.
- (b) Beschreiben Sie $f[(1, 1) := 0]$ mit der Lambda-Notation.
- (c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv auf \mathbb{B} ?
- (d) Geben Sie die Elemente der Menge f an.
- (e) Geben Sie die Elemente der Menge $f \circ g$ an.

Aufgabe 9.4: (Terminierung von Relationen)

Seien zwei Relationen gegeben:

$$R_1 = \{((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{R})^2 \mid x > x' \wedge y < y'\}$$

$$R_2 = \{((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^2 \mid x + y > x' + y' \geq -150\}$$

Zeigen Sie die Terminierung dieser Relationen, indem Sie Einbettungen in die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y\}$ angeben.

Aufgabe 9.5: (Rekursionsfunktionen)

Geben Sie eine Prozedur mit der folgenden Rekursionsfunktion an:

$\lambda n \in \mathbb{N}. \text{ if } n = 0 \text{ then } \langle \rangle \text{ else } \langle n - 1, n - 1 \rangle$

Aufgabe 9.6: (Rekursionsfolge)

Zu einer Prozedur $p : X \rightarrow Y$ kann man eine Prozedur $X \rightarrow \mathcal{T}(X)$ angeben, die für terminierende Argumente x von p den Rekursionsbaum für x und p liefert. Schreiben Sie eine solche Prozedur für *fib*. Realisieren Sie die Prozedur in Standard ML.

Aufgabe 9.7: (Größe und Tiefe von Rekursionsbäumen)

Zu einer Prozedur $p : X \rightarrow Y$ kann man Prozeduren $X \rightarrow \mathbb{N}$ angeben, die für terminierende Argumente x von p die Größe und die Tiefe des Rekursionsbaums für x und p liefern. Schreiben Sie solche Prozeduren für *gcd*. Realisieren Sie die Prozeduren in Standard ML.

Aufgabe 9.8: (Baumrekursion)

Geben Sie eine baum-rekursive Prozedur $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die die Funktion $\lambda n \in \mathbb{N}. 0$ berechnet.

Aufgabe 9.9: (Rekursion)

Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$p : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$p(x, y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x, y - 1) \text{ else}$$

$$\quad \text{if } x > y \text{ then } p(x - 1, y) \text{ else } x$$

- Geben Sie die Rekursionsfolge und die Rekursionstiefe für p und $(-2, 1)$ an.
- Geben Sie die Rekursionsfunktion und die Rekursionsrelation von p an.
- Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.
- Beschreiben Sie die Ergebnisfunktion von p ohne Rekursion.

Aufgabe 9.10: (Rekursion)

Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$p : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$p(n, x) = \text{if } n^2 \leq x \text{ then } p(n + 1, x) \text{ else } n - 1$$

- Geben Sie die Rekursionsfolge und die Rekursionstiefe für p und $(0, 4)$ an.
- Geben Sie die Rekursionsfunktion und die Rekursionsrelation von p an.
- Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.
- Beschreiben Sie die Ergebnisfunktion von p ohne Rekursion.

Aufgabe 9.11: (Rekursion)

Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$p : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$p(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else}$$

$$\quad \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else}$$

$$\quad \text{if } x \leq y \text{ then } p(x - 1, y + 1) \text{ else } p(x + 1, y - 1)$$

- Geben Sie die Rekursionsfolge und die Rekursionstiefe für p und $(3, 81)$ an.
- Geben Sie die Rekursionsfunktion und die Rekursionsrelation von p an.
- Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.
- Beschreiben Sie die Ergebnisfunktion von p ohne Rekursion.