9.14 Gegeben sei die Prozedur p:
$p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$p(n,x) = \text{if } n^2 \leq x \text{ then } p(n+1,x) \text{ else } n-1$

a Rekursionsfolge: $(0,4) \to (1,4) \to (2,4) \to (3,4)$
Rekursionstiefe: 3

b Rekursionsfunktion: $\lambda(n,x) \in \mathbb{N}^2.\text{ if } n^2 \leq x \text{ then } \langle(n+1,x)\rangle \text{ else } \langle\rangle$
Rekursionsrelation: $\{(n,n+1) \in \mathbb{N}^2 | n^2 \leq x\}$

c natürliche Terminierungsfunktion: $\lambda(n,x) \in \mathbb{N}^2.x + 1 - n^2$

d Ergebnisfunktion:
$f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$f(n,x) = max\{n-1, floor(\sqrt{x})\}$

9.23 Wir wollen zeigen, dass die Prozedur p die Funktion f berechnet. Dazu müssen wir zeigen, dass p terminiert und das die folgende Gleichung erfüllt sind:

$$f(n,x) \stackrel{!}{=} \text{if } n^2 \leq x \text{ then } f(n+1,x) \text{ else } n-1$$

Beweis erster Fall: $n \leq \sqrt{x}$
if $n^2 \leq x$ then $f(n+1,x)$ else $n-1$
$= f(n+1,x)$
$= max\{n, floor(\sqrt{x})\}$
$= floor(\sqrt{x})$
$= max\{n-1, floor(\sqrt{x})\}$

zweiter Fall: $n > \sqrt{x}$
if $n^2 \leq x$ then $f(n+1,x)$ else $n-1$
$= n-1$
$= max\{n-1, floor(\sqrt{x})\}$
da $n > floor(\sqrt{x})$ ist, gilt $n-1 \geq floor(\sqrt{x})$